Informations : Tous documents et calculatrices autorisés. Pas d'ordinateurs.

9 questions, 2 point par question et 2 points pour le soin. les points sont donnés si la réponse est juste précise et concise ; si la réponse comporte des phrases non pertinentes celles-ci ne sont pas prises en compte ; si une question ne paraît pas claire il faut la reformuler clairement (et écrire cette reformulation) avant de donner une réponse ; si l'utilisation d'autres notations que les officielles (celles que le texte introduit) s'avère nécessaire, il faut alors écrire la définition de ces nouvelles notations à partir des notations officielles avant de les utiliser.

Question 1

On donne la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^3 + x^7 \end{array}$

a) Écrire avec cette fonction f un pas de la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 1$.

b) Écrire l'algorithme complet de résolution de l'équation (en langage d'algorithme, pas en langage de maxima).

c) Cet algorithme fonctionne-t-il toujours ? Si non corriger l'algorithme de b) pour qu'il fonctionne toujours.

Question 2 On souhaite calculer numériquement, avec une méthode de Runge-Kutta, la solution de

$$\frac{dx}{dt} = t + x^2 \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0$$

d) On donne un tableau de méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

écrire le premier pas de calcul du temps 0 au temps h.

e) Écrire le système sous forme autonome, et écrire le premier pas de l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 entre 0 et h.

f) On considère la méthode emboîtée

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ \hline & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \end{array}$$

écrire le premier pas de l'algorithme de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x^2$, $x(0) = x_0$ en insistant sur la question de la validation du pas de temps.

Question 3

On considère le système d'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 & \text{pour} \quad 0 < x < 1 \text{ et } t > 0 \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{où} \quad T0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x}(1,t) = 0 & \end{cases}$$

qui porte sur la fonction $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longrightarrow & T(x,t) \end{array}$

g) Écrire sa forme discrète en temps en utilisant la méthode d'Euler implicite.

h) Écrire la forme faible de l'équation obtenue question g.

i) Trouver une fonction de $T(x,t)$ ne dépendant pas du temps à l'aide de la forme faible obtenue question h.